

Können die Schülerinnen und Schüler *Problemlösendes Denken* im Mathematikunterricht lernen?

Probleme lösen ist eine der fünf prozessbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards und im LehrplanPLUS. Dies wird von den Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung einer herausfordernden oder unbekannteren Aufgabe, zu deren Bearbeitung keine Routinen zur Verfügung stehen, gefordert. Die Kinder entwickeln und nutzen zielgerichtet Lösungsstrategien und wenden mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten an. Damit alle Schülerinnen und Schüler die Chance erhalten, ihren individuellen Fähigkeiten und Fertigkeiten entsprechend Probleme zu lösen, brauchen sie ein Lernangebot.

1. Die systematische Anbahnung einer Fragehaltung bzw. eines Problembewusstseins ist Unterrichtsprinzip.
2. Problemlösendes Denken bedarf eines strukturiert bzw. intelligent erworbenen Wissens.
3. Problemlösestrategien werden erworben und geübt.
4. Für weiteres Problemlösendes Denken ist gezieltes Reflektieren über Lösungsstrategien unerlässlich.

1. Die systematische Anbahnung einer Fragehaltung bzw. eines Problembewusstseins ist Unterrichtsprinzip

Problemlösendes Denken findet in einem Unterricht statt, in dem

- interessante Problemsituationen (z. B. Gibt es mehr Quader- als Würfelnetze?) angeboten werden, deren Lösung die Kinder fordert, ohne sie zu überfordern. Probleme lösen zu können, ist motivierend und leistungsfördernd. Die Auswahl setzt bei der Lehrkraft sehr gute fachliche Kenntnisse, detailliertes Wissen über die Vorkenntnisse, aber auch über die Interessen der Kinder voraus.
- kreative Lösungen gewürdigt und Irrwege sowie Fehler als Chance genutzt werden.
- mit den Kindern Schritte/Fragen erarbeitet werden, gezielt und systematisch an Problemstellungen heranzugehen.

Mögliche kompetenzorientierte Impulse sind:

- Was weißt du schon im Zusammenhang mit dem Problem?
- Welche Methoden/Techniken stehen dir zur Verfügung, um das Problem zu lösen?
- Wie kannst du das Problem darstellen?
- Gibt es mehrere Möglichkeiten, das Problem zu lösen?

Die Schülerinnen und Schüler wenden diese Herangehensweise zunehmend selbständig an.

2. Problemlösendes Denken bedarf eines strukturiert bzw. intelligent erworbenen Wissens

Um Probleme zunehmend selbständig lösen zu können, brauchen die Schülerinnen und Schüler

- automatisiertes mathematisches Grundwissen (z. B. Einmaleinssätze, schriftliche Algorithmen, Messen),
- heuristische Hilfsmittel (z. B. das Anfertigen von Skizzen und Tabellen),
- heuristische Prinzipien (z. B. Analogieprinzip) und heuristische Strategien (z. B. systematisches Probieren mit oder ohne Verwendung von konkretem Material).

Diese Grundlagen werden schrittweise erlernt und in Problemsituationen genutzt, wie in folgendem Beispiel dargestellt:

Aufgabe	Ausschnitt einer Schülerlösung	Verbalisierung der Denk- und Rechenwege
Bestimme in deiner Gruppe die Anzahl der Zahlen von 100 bis 999, in denen weder die Ziffer 3 noch die Ziffer 8 vorkommen.	<p>Bis 400 ist es nur 1 Zahl.</p> <p>Bis 500 sind es 64 Zahlen.</p> <p>Bis 600 sind es 64 Zahlen.</p> <p>Bis 700 sind es 64 Zahlen.</p>	<p>„Wir haben versucht, alle Zahlen aufzuschreiben und haben dann gemerkt, dass dies zu viele sind und dann das Tausenderbuch als Hilfe verwendet.“</p> <p>„Wir haben überlegt, dass die 3 oder die 8 an der Hunderterstelle stehen kann und dann sind eigentlich fast zwei Hundertertafeln also 198 Zahlen weniger.“</p> <p>„In jedem Hunderterfeld kann die 3 und die 8 an der Zehnerstelle und der Einerstelle stehen. So fallen in jedem Feld gleich viele Zahlen weg.“</p> <p>„Wir haben das Hunderterfeld nicht genutzt, sondern 10 Felder mit einigen Zahlen aufgezeichnet.“</p>

Abb. 1: Ausschnitt einer in Gruppenarbeit erstellten Lösung

3. Problemlösestrategien werden erworben und geübt

Im Unterricht müssen Lernsituationen geschaffen werden, in denen die Kinder heuristische Strategien gezielt erwerben. Der Erwerb erfolgt in der Regel in mehreren Schritten, im Folgenden aufgezeigt am Beispiel des Rückwärtsarbeitens (nach Regina Bruder):

a) Bewusstmachen der Strategie anhand eines überzeugenden Beispiels

<p>Aufgabe Die Kinder der Grundschule Altstadt besuchen eine Zirkusvorstellung. Der Clown hat einen Korb voller Blumen. Dem ersten Kind schenkt er die Hälfte der Blumen und zwei mehr. Dem zweiten Kind schenkt er die Hälfte der übrig gebliebenen Blumen und zwei mehr. Auch dem dritten Kind schenkt er die Hälfte der übrig gebliebenen Blumen und zwei mehr. Nun hat der Clown nur noch eine Blume im Korb. Wie viele Blumen hatte der Clown zu Beginn in seinem Korb?</p>	<p>Das Problem kann auch über die den Kindern bekannte Strategie des systematischen Probierens mit oder ohne Material gelöst werden. Die Aufgabe ist besonders geeignet für das Rückwärtsarbeiten.</p> <p>Sollte kein Kind das Rückwärtsarbeiten als Möglichkeit entdecken, so wird diese kommentarlos präsentiert. Die Kinder erarbeiten selbständig die Vorgehensweise und vergleichen sie mit eigenen Lösungsstrategien.</p>
---	---

Abb 2: Ausschnitt einer Lösung – Strategie des Rückwärtsarbeitens

b) Bewusste Anwendung der heuristischen Strategie

Dabei erfahren die Kinder über das Beispiel hinaus den Nutzen der Strategie. Nur so kann davon ausgegangen werden, dass sie diese künftig anwenden und langfristig verinnerlichen. Möglichkeiten der Weiterarbeit sind:

- *Es bleiben 0,2,3,4 ... Blumen im Korb übrig. Wie viele Blumen hatte der Clown zu Beginn im Korb?*
- *Wo kommt im Alltag bzw. in der Mathematik Rückwärtsarbeiten vor? (z. B. Zahlenrätsel)*
- *Formuliere selbst Aufgaben, bei denen es sich anbietet, rückwärts zu arbeiten.*

c) Kontexterweiterung und unbewusste Nutzung der heuristischen Strategie

Ziel ist es, dass die Kinder Rückwärtsarbeiten unbewusst und flexibel auch in anderen Bereichen der Mathematik anwenden, z. B. in Geometrie.

<p><i>Die blaue, rote, gelbe und grüne Figur sind Quadrate. Der Umfang des blauen Quadrats beträgt 16 cm, der des roten 24 cm. Welchen Umfang hat das grüne Quadrat?</i></p>	<p>(Beispiel Johann Sjuts)</p>
--	--------------------------------

Abb. 3: Aufgabenstellung für Umfangberechnung von Sjuts

4. Für weiteres Problemlösendes Denken ist gezieltes Reflektieren über Lösungsstrategien unerlässlich

Problemlösendes Denken erfolgt in Schritten:

Die Schülerinnen und Schüler präzisieren das Problem, planen und entwickeln Lösungswege, reflektieren über Lösungswege bzw. überprüfen sie auf Plausibilität. Insbesondere dem Reflektieren kommt hinsichtlich der Problemlösekompetenzen besondere Bedeutung zu.

Impulse wie *Vergleiche die Lösungswege. Für welchen Lösungsweg entscheidest du dich? Begründe. Beschreibe den Lösungsweg deines Lernpartners. Warum führte der Lösungsweg nicht zum Ziel?* sind Standards im kompetenzorientierten Unterricht.

Quellen und Literaturhinweise:

- Johann Sjuts (2010): Mit Mathematik Wirklichkeit schaffen. In: Timo Leuders, Lisa Hefendehl-Hebeker, Hans-Georg Weigand: Mathe Magische Momente
- Regina Bruder (2018): Problemlösen lehren und lernen. In: Grundschulmagazin 2, S. 7 ff.
- [LehrplanPLUS_LIS_Zahlen](#)
- [LehrplanPLUS_LIS_Rückwärtsarbeiten](#)